概率论第 1 次习题课讲义

宗语轩

2022 秋, USTC

1 集合运算, 事件与概率

方法论:

$$\text{事件运算} \longleftrightarrow \text{集合运算}$$

对于事件 A, B, 有

$$\text{事件交, 并, 余, 差} \longleftrightarrow A\cap B, A\cup B, A^c(\text{对立事件}), A\backslash B$$

$$\omega\in A\cap B \iff \omega\in A\text{且}\omega\in B \iff A, B\text{同时发生}$$

$$\omega\in A\cup B \iff \omega\in A\text{或}\omega\in B \iff A\text{发生或}B\text{发生}$$

$$\omega\in A^c \iff \omega\notin A \iff A^c\text{发生} \iff A\text{不发生}$$

$$\omega\in A\backslash B \iff \omega\in A\text{且}\omega\notin B \iff A\text{发生但同时}B\text{不发生}$$

1.1 随机事件 (集合) 的运算

设 $\{A_i, i\in I\}$ 为一列事件族, 类比数列上下确界的定义, 我们定义记号

$$\sup_{i\in I} A_i := \bigcup_{i\in I} A_i = \{x : \exists i\in I, x\in A_i\}, \qquad \inf_{i\in I} A_i := \bigcap_{i\in I} A_i = \{x : \forall i\in I, x\in A_i\}.$$

集合运算的三个基本性质: 交换律, 结合律, 分配律. 分配律可表示为:

$$B\cap\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B\cap A_i), \qquad B\cup\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B\cup A_i)$$

定理 1.1 (**De.Morgan 法则**)**.** 设 $\{A_i, i\in I\}$ 为一列事件族, 则有

(1) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c;$

---

[0] 个人主页: http://home.ustc.edu.cn/~zyx240014/.
发现错误欢迎联系: zyx240014@mail.ustc.edu.cn.

(2) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$.

关于 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, 我们有如下分划:

命题 1.1. 设 $\{A_i, i=1,2,\cdots,n\}$ 为一列事件族 $(n \leqslant +\infty)$, 则有

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{n} \left(A_i \backslash \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right).$$

其中 $\bigsqcup$ 表示无交并. 通过上述方式, 我们可以将 $\bigcup_{i\in I} A_i$ 转化成事件的无交并 (互不相容), 并利用概率测度的可列可加性进行计算.

我们考虑事件序列 $\{A_n\}$ 的极限:

(1) 上限事件 : $\limsup_{n\to+\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \{\omega : 有无穷多个A_k包含\omega\}$, 即 $\{A_n\}$ 发生无穷多次;

(2) 下限事件 : $\liminf_{n\to+\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \{\omega : 有限个A_k不包含\omega\}$, 即 $\{A_n\}$ 不发生有限次.

注. 利用 $\left\{\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的递减性和 $\left\{\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的递增性, 我们亦有:

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m, \qquad \liminf_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

定义 1.1. 我们称事件序列 $\{A_n\}$ 收敛, 若 $\limsup_{n\to+\infty} A_n = \liminf_{n\to+\infty} A_n$. 记收敛的极限为 $A := \lim_{n\to+\infty} A_n$.

接上, 不难验证 $A \in \mathcal{F}$, 且满足概率连续性: $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (注意到 $\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subseteq A_n \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$).

例 1.1. 设 $\{f_n(x)\}$ 及 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数, 则使 $f_n(x)$ 不收敛于 $f(x)$ 的一切点 x 所形成的集合 D 可表示为

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\right\}.$$

引理 1.1. 概率测度的一些性质:

(1) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$;

(2) 若 $A \subset B$, 则 $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B\backslash A) \geq \mathbb{P}(A)$;

(3) $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i \backslash \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right)$, $n \leqslant +\infty$;

(4) $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$;

(5) 次 (σ) 可加性:

$$\mathbb{P}(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i),\ n\leqslant+\infty;$$

(6) **Jordan 公式**:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{i_1<\cdots<i_k}\mathbb{P}(A_{i_1}\cdots A_{i_k}).$$

其中 (3) 由**命题 1.1** 得到, (5) 可由 (2), (3) 得到, (6) 为作业.

例 1.2. 设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立, $\mathbb{P}(A_i)=p_i,i=1,2,\cdots,n$. 求:

(1) 这 n 个事件中至少发生一个的概率 P_1;

(2) 这 n 个事件中恰好发生一个的概率 P_2.

解. 注意到 $\{$这 n 个事件中至少发生一个$\}=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$, 故有

$$P_1=\mathbb{P}(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-\mathbb{P}(A_1^cA_2^c\cdots A_n^c)\xlongequal{\text{独立}}1-\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i^c)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i).$$

注意到 $\{$这 n 个事件中恰好发生一个$\}=(A_1^cA_2^c\cdots A_n)\sqcup(A_1^cA_2^c\cdots A_{n-1}A_n^c)\sqcup\cdots\sqcup(A_1A_2^c\cdots A_n^c)$, 故有

$$\begin{aligned}P_2&=\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n}(A_1^cA_2^c\cdots A_{i-1}^cA_iA_{i+1}^c\cdots A_n^c)\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_1^cA_2^c\cdots A_{i-1}^cA_iA_{i+1}^c\cdots A_n^c)\\&\xlongequal{\text{独立}}\sum_{k=1}^{n}p_k\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(1-p_i).\end{aligned}$$

□

例 1.3 (赌徒破产问题). Player 财富为 k, Dealer 财富为 $N-k$, 掷一枚均匀硬币, 出现正面 H 时 Player 赢 1 Dealer 输 1, 否则 Dealer 赢 1 Player 输 1. 双方赌到一方输光时游戏结束. 问存在某个状态游戏结束的概率?

解. 假设游戏结束后继续投掷硬币并保持两人财富保持不变. 记 $A_i=\{$第$(i-1)N+1$次至第iN次投掷硬币均出现正面 H$\}$, $B=\{$存在某个状态游戏结束$\}$. 则 $B^c=\{$游戏无限进行下去$\}$, 且 A_i 相互独立. 注意到对 $\forall i\in\mathbb{N}^*$, 有 $A_i\subseteq B$, 故对 $\forall n\in N^*$, 有 $B^c\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c$. 所以

$$\mathbb{P}(B^c)\leqslant\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c\right)\xlongequal{\text{独立}}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i^c)=(1-2^{-N})^n.$$

由 n 的任意性, 令 $n\to+\infty$, 得 $\mathbb{P}(B^c)=0$, 即 $\mathbb{P}(B)=1$. 故存在某个状态游戏结束的概率为 1. □

我们已经知道, 重复独立试验中, 小概率事件必然发生. 上例是其中的一个应用.

1.2 条件概率的应用与递推法

引理 1.2 (全概率公式). 设 $B_1,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个划分, 且 $\forall i,\mathbb{P}(B_i)>0$, 则

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A\mid B_i)$$

引理 1.3 (贝叶斯公式). 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 Ω 的一个划分, $\mathbb{P}(A_i)>0,\forall i$, 则当 $\mathbb{P}(B)>0$ 时有:

$$\mathbb{P}(A_i\mid B)=\frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B\mid A_i)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B\mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B\mid A_j)}$$

引理 1.4. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 Ω 的一个划分, $\mathbb{P}(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, 则有

$$\mathbb{P}(A_1A_2\cdots A_n)=\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

例 1.4. A 与 B 两个小孩从自己装有红与黄两种颜色积木的袋子里各摸出一块, A 摸出红色与黄色的概率分别是 0.8 与 0.2, B 摸出红色与黄色的概率分别是 0.9 与 0.1. 现有一块红色积木, 求其为 A 取出的概率.

解. 记事件 X 表示积木是由 A 摸出的, 事件 Y 表示摸出的积木是红色的. 则有

$$\mathbb{P}(X|Y)=\frac{\mathbb{P}(Y|X)\mathbb{P}(X)}{\mathbb{P}(Y|X)\mathbb{P}(X)+\mathbb{P}(Y|X^c)\mathbb{P}(X^c)}=\frac{0.8\cdot 0.5}{0.8\cdot 0.5+0.9\cdot 0.5}=\frac{8}{17}.$$

□

例 1.5. 设有甲和乙两个罐子, 甲罐中有 m 个红球和 n 个黑球, 乙罐中有 n 个红球和 m 个黑球, 且 $m>n$. 随机选取一个罐子再从中随机抽取一球, 发现为红球, 将其放回后并摇匀. 若再次在该罐中随机抽取一球, 问该球仍为红色的概率是否比 $\frac{1}{2}$ 大?

解. 记事件 X 表示球是由甲取出的, 事件 R_1 表示第一次取出的球是红球, 事件 R_2 表示第二次取出的球是红球. 则有

$$\mathbb{P}(R_2|R_1)=\frac{\mathbb{P}(R_1R_2)}{\mathbb{P}(R_1)}=\frac{\mathbb{P}(R_1R_2|X)\mathbb{P}(X)+\mathbb{P}(R_1R_2|X^c)\mathbb{P}(X^c)}{\mathbb{P}(R_1|X)\mathbb{P}(X)+\mathbb{P}(R_1|X^c)\mathbb{P}(X^c)}=\frac{\frac{1}{2}((\frac{m}{m+n})^2+(\frac{n}{m+n})^2)}{\frac{1}{2}(\frac{m}{m+n}+\frac{n}{m+n})}=\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}>\frac{1}{2}.$$

这里不能取等是因为 $m>n$. □

例 1.6. 平面上有 n 个不同的点, 编号分别为 $1,2,\cdots,n$. 现有一个质点在这些点上做随机游动, 假设每次它在某点上停留片刻之后就会在其余所有点中等概率选择一个并移动到该点上. 设其初始位置为点 1 上, 求它在第一次返回此点之前访问过点 2 的概率.

解. 设所求概率对应的事件 C_1, 事件 A_i 表示在初始位置为点 i 下, 第一次返回点 1 之前访问过点 2 (访问过的点包括初始位置), 事件 B_{ij} 表示初始位置为点 i 下首次到 j. 则有

$$\mathbb{P}(C_1)=\mathbb{P}(B_{12})\mathbb{P}(C_1|B_{12})+\sum_{k=3}^{n}\mathbb{P}(B_{1k})\mathbb{P}(C_1|B_{1k})=\mathbb{P}(B_{12})\mathbb{P}(A_2)+\sum_{k=3}^{n}\mathbb{P}(B_{1k})\mathbb{P}(A_k)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n-1}\mathbb{P}(A_2) + \frac{n-2}{n-1}\mathbb{P}(A_k) \\
&= \frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\mathbb{P}(A_3).
\end{aligned}
$$

由对称性知, $\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_3^c) = \frac{1}{2}$. 所以 $\mathbb{P}(A_1) = \frac{n}{2(n-1)}$. □

例 1.7. 甲乙两坛子中各装一只白球和一只黑球, 从两坛中各取出一球交换后放入另一坛中. 记事件 A_n, B_n, C_n 分别表示第 n 次交换后甲坛的白球数是 2, 1, 0, 记 p_n, q_n, r_n 表示其对应的概率, 求 p_n, q_n, r_n 的关系式, 并讨论当 $n \to +\infty$ 时的情形.

解. 我们有

$$
p_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{4}q_n
$$

类似地, 有

$$
\begin{aligned}
q_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n) \\
&= \mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) \\
&= p_n + \frac{1}{2}q_n + r_n.
\end{aligned}
$$

$$
r_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(C_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(C_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{4}q_n
$$

将上述三式联立, 利用 $q_0 = 1, q_1 = \frac{1}{2}$, 消去 p_n, r_n, 得

$$
q_{n+1} - q_n = -\frac{1}{2}(q_n - q_{n-1}) \implies q_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)
$$

进而

$$
p_n = r_n = \frac{1}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right)
$$

令 $n \to +\infty$, 可得 $p := \lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{6}$, $r := \lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1}{6}$, $q := \lim_{n\to+\infty} q_n = \frac{2}{3}$.

□

例 1.8 (配对问题). n 对夫妇面对面随机占座, 求恰好有 k 对夫妇面对面坐的概率 $P_k^{(n)}$.$(0 \leqslant k \leqslant n)$.

解. 把 n 位男士和 n 位女士按序标号, 且同对夫妇标号相同. 记 A_i 表示标号 i 的夫妇面对面坐. 先看 $k = 0$ 时的情形. 对 $\forall i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, 有

$$
\mathbb{P}(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}
$$

利用 Jordan 公式, 有

$$
P_0^{(n)} = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\right) = 1 - \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{i_1<\cdots<i_k}\mathbb{P}(A_{i_1}\cdots A_{i_k})
$$

$$\begin{aligned}
&= 1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

再看 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时的情形. 考虑仅标号为第 $i_1, i_2, \cdots i_k$ 的夫妇面对面坐的概率:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{i_1}\cdots A_{i_k}A_{i_{k+1}}^c\cdots A_{i_n}^c) &= \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}|A_{i_1})\cdots\mathbb{P}(A_{i_k}|A_{i_1}\cdots A_{i_{k-1}})\mathbb{P}(A_{i_{k+1}^c}\cdots A_{i_n}^c|A_{i_1}\cdots A_{i_k})\\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{n-(k-1)}P_0^{(n-k)}\\
&= \frac{(n-k)!}{n!}P_0^{(n-k)}
\end{aligned}$$

故有

$$P_k^{(n)} = \sum_{i_1<\cdots<i_k}\mathbb{P}(A_{i_1}\cdots A_{i_k}A_{i_{k+1}}^c\cdots A_{i_n}^c) = \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!}P_0^{(n-k)} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

□

注. 我们发现, $\lim\limits_{n\to+\infty}P_k^{(n)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$, 该值即为参数为 1 的泊松分布的随机变量取 k 值的概率 (后续章节会讲到).

变式 1.8. 考试时共有 N 张考签, n 个学生参加考试 ($n \geqslant N$), 被抽过的考签立刻放回, 求在考试结束之后, 恰好有 k 张没有被抽到的概率.
答案: $\displaystyle\sum_{i=0}^{N-k}(-1)^i\frac{N!}{k!i!(N-k-i)!}\frac{(N-k-i)^n}{N^n}$.

2 补充习题

注. 关于"摸球"问题, 常见方法主体为如下几种:

- 若为古典概型 (样本空间有限 + 各事件发生等概率) 问题, 可以通过排列组合方法, 计算样本空间和事件 A 的样本点个数, 然后按定义计算: 对于事件 $A \subseteq \Omega$, 有

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

- 利用全概率公式, 贝叶斯公式, **教材习题 1.4.2** 的公式等条件概率方法, 以及利用基本的概率测度运算性质.

- 若题干中涉及到含参整变量, 可结合上条方法得到递推关系, 转化成数列递推方法解决.

1 证明 **Bonferroni 不等式**:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{r=1}^{n} A_r\right) \geqslant \sum_{r=1}^{n} \mathbb{P}(A_r) - \sum_{1\leqslant r<k\leqslant n} \mathbb{P}(A_r \cap A_k).$$

提示. 注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{r=1}^{n+1} A_r\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{r=1}^{n} A_r\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{r=1}^{n}(A_r \cap A_{n+1})\right)\\ &\geqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{r=1}^{n} A_r\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \sum_{r=1}^{n} \mathbb{P}(A_r \cap A_{n+1}),\end{aligned}$$

再利用归纳法即可.

2 甲、乙两人轮流抛掷一枚均匀的骰子. 甲先掷, 一直到掷出了 1 点, 交给乙掷, 而到乙掷出了 1 点, 再交给甲掷, 并如此一直下去. 求第 n 次抛掷时由甲掷的概率.

解. 记事件 A_n 表示第 n 次抛掷时由甲掷, 记 $p_n = \mathbb{P}(A_n)$. 利用全概率公式, 有

$$p_n = \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-1})\mathbb{P}(A_n|A_{n-1}) + \mathbb{P}(A_{n-1}^c)\mathbb{P}(A_n|A_{n-1}^c) = \frac{5}{6}p_{n-1} + \frac{1}{6}(1-p_{n-1}) = \frac{2}{3}p_{n-1} + \frac{1}{6}.$$

利用 $p_1 = 1$, 整理并求解:

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}(p_{n-1} - \frac{1}{2}) \implies p_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}.$$

□

3 100 名乘客登上一架正好有 100 个座位的飞机, 每名乘客对应一个座位. 第一位乘客先随机选择一个座位坐. 第二位乘客如果自己的座位空着就坐自己的座位, 否则就在其他空余的座位中随机选择一个座位坐. 第三位乘客如果自己的座位空着就坐自己的座位, 否则就在其他空余的座位中随机选择一个座位坐. 这个过程一直持续到所有的 100 名乘客都登机为止. 求最后一名乘客坐自己的座位的概率.

提示. 不妨对任意 i, 第 i 名乘客对应第 i 个座位. 把上述 100 一般化为 $n(n \geqslant 2)$, 记最后一名乘客坐自己的座位的概率是 p_n. 用归纳法证明 $p_n = \frac{1}{2}$. 注意到: 若第 1 位乘客选择第 1 个座位, 则最后一名乘客一定坐到自己的座位; 若第 1 位乘客选择第 i 个座位 $(2 \leqslant i \leqslant n-1)$, 则第 2 位至第 $i-1$ 位乘客都坐到自己的座位, 之后的情形等同于原题中乘客座位数量为 $n-i+1$ 时的情形; 若第 1 位乘客选择第 n 个座位, 则最后一名乘客一定坐不到自己的座位. 因此, 通过对第一位乘客选择的座位号取条件概率可以得到

$$p_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n} p_k.$$

利用归纳假设即得概率是 $\frac{1}{2}$.

4 涂色问题 平面上的 n 个点和连接各点之间的连线叫做一个完全图, 记作 G. 点称作图的顶点, 顶点之间的连线叫做边, 共有 $\binom{n}{2}$ 条. 给定一个整数 k, G 中任意 k 个顶点连同相应的边构成一个有 k 个顶点的完全子图, G 中共有 $\binom{n}{k}$ 个这样的子图, 记作 $G_i, i=1,\cdots,\binom{n}{k}$. 现将图 G 的每条边涂成红色或蓝色. 当 $\binom{n}{k}<2^{\frac{k(k-1)}{2}-1}$ 时, 问: 是否有一种涂色方法, 使得没有一个子图 G_i 的 $\binom{k}{2}$ 条边是同一颜色的.

解. 上述组合问题我们通过概率方法解决. 我们对 G 的边进行随机涂色, 每条边为红色和蓝色的概率是 $\frac{1}{2}$. 记事件 A_i 表示子图 G_i 各边的颜色相同, 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i^c$ 表示没有一个子图 G_i 的 $\binom{k}{2}$ 条边是同一颜色的. 利用

$$\mathbb{P}(A_i)=\mathbb{P}(G_i\text{的各边均为红色})+\mathbb{P}(G_i\text{的各边均为蓝色})=\frac{2}{2^{\binom{k}{2}}}=2^{\frac{k(k-1)}{2}-1}$$

及 $\binom{n}{k}<2^{\frac{k(k-1)}{2}-1}$, 有

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\mathbb{P}}(A_i)=\binom{n}{k}2^{\frac{k(k-1)}{2}-1}<1$$

故 $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i^c\right)>0$. 从而存在一种涂色方法, 使得没有一个子图 G_i 的 $\binom{k}{2}$ 条边是同一颜色的. □

3 乘积空间浅引 *

问题: 同时抛掷 2 枚硬币与抛掷 1 枚硬币两次的概率空间的关系?
事实: $\forall i\in I,\mathcal{F}_i\subset 2^{\Omega}$ 为 σ 代数, 则 $\bigcap\limits_{i\in I}\mathcal{F}_i$ 亦为 σ 代数.

例 3.1. $\Omega=\{1,2,\cdots,n\},A_i=\{i\}(n>2),\mathcal{F}_i=\{\varnothing,\Omega,A_i,A_i^c\}$, 则 $\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2=\{\varnothing,\Omega,A_1,A_1^c,A_2,A_2^c\}$, 明显 $A_1\cup A_2=\{1,2\}\notin\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$, 非 σ 代数.

由小 σ 代数到大 σ 代数, 方式之一: 对 $\mathcal{F},\mathcal{G}\subset 2^{\Omega}$, 称包含 $\mathcal{F},\mathcal{G}$ 的最小 σ 代数为 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 生成的 σ 代数, 记为 $\sigma(\mathcal{F}\cup\mathcal{G})$.

典型例子: 1 维 Borel 域: $\mathbb{R}$ 上形如 $(a,b]$ 区间生成的 σ 代数, 记为 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 其中每个元素称为 Borel 集. $\{b\}=\bigcap\limits_{n}\left(b-\frac{1}{n},b\right]$,$(a,b)=(a,b]\backslash\{b\},[a,b]=\{a\}\cup(a,b],[a,b)=\{a\}\cup(a,b)$. 即一切开区间, 闭区间, 半开半闭区间均为 Borel 集.

n 维 Borel 域: $\mathbb{R}^n$ 上形如 $(a_1,b_1]\times\cdots\times(a_n,b_n]$ 生成的 σ 域, 记为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

---

[0]本节来自 19 级数院何家志同学整理的往年笔记, 这部分大家有兴趣了解即可

乘积空间: $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ 构造更大空间?

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}$$

$$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, 2\}$$

未必为 σ 代数.

例 3.2. 接例子(3.1). $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \{\varnothing, \Omega \times \Omega, A_1 \times A_2^c, A_1^c \times A_2, A_1^c \times A_2^c, \cdots\}$, 显见 $A_1 \times A_2 \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, 但

$$\begin{aligned}(A_1 \times A_2)^c &= \Omega \times \Omega \backslash \{1, 2\} \\ &= \{2, 3, \cdots, n\} \times \Omega \cup \Omega \times \{1, 3, 4, \cdots, n\} \\ &\notin \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2\end{aligned}$$

记 $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ 看作 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ 的 σ 代数, 概率测度? 引入 $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ 上函数

$$\mathbb{P}_{12} : \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \to \mathbb{R}, \mathbb{P}_{12}(A_1 \times A_2) := \mathbb{P}_1(A_1)\mathbb{P}_2(A_2)$$

特别地, $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ 中元素的不交并, 若 Ω_1, Ω_2 有限, $\mathcal{F}_i = 2^{\Omega_i}$, 这时 $\mathbb{P}_{12}$ 良定.

对应: $A_i \in \mathcal{F}_i$, $A_1 \longleftrightarrow A_1 \times \Omega_2, A_2 \longleftrightarrow \Omega_1 \times A_2$, 在 $(\Omega_1 \times \Omega_2, \sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2), \mathbb{P}_{12})$ 看 $A_1 \times A_2$

$$\mathbb{P}_{12}(A_1 \times A_2) = \mathbb{P}_1(A_1)\mathbb{P}_2(A_2) = \mathbb{P}_{12}(A_1 \times \Omega_2) \cdot \mathbb{P}_{12}(\Omega_1 \times A_2)$$

表明 $A_1 \times \Omega_2$ 与 $\Omega_1 \times A_2$ 独立.

例 3.3. 掷硬币 2 次. $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\} = \{H, T\} \times \{H, T\}$

$$\mathbb{P}_{12}(HH) = \mathbb{P}_1(H)\mathbb{P}_2(H) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}_{12}(HT) = \frac{1}{4}.$$